クリフォード代数上に構成されたマリアヴァン解析について

東北大学　大学院理学研究科　数学専攻
渡辺孝佳 (Takayoshi WATANABE) *

概要

非可換な空間に対する確率解析として boson に関する結果は多く存在する．一方で, 他の非可換な空間に対する (Itô 解析以外の) 確率解析はほとんど考えられてこなかった．本研究では Malliavin 解析の fermion を用いた類似物を構成し, それを用いて fermion に対する解析を行っている．ここでは便宜上, その類似物を反対称 Malliavin 解析と呼ぶ．反対称 Malliavin 解析では通常の Malliavin 解析に対応する様々な結果が成立する．さらにいくつか応用例も存在する．

1　導入

1.1　Malliavin 解析概略

最初にこの subsection で Malliavin 解析の簡単な復習をしたい．内容, 記号は [Nua06, FLS01] を参考にした．

$\mathcal{H}$ を可分な実 Hilbert 空間とする．完備確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ が存在して線形写像 $W : \mathcal{H} \to L^2(\Omega)$ が中心 0, 共分散 $\mathbb{E}(W(h)W(k)) = \langle h, k\rangle_{\mathcal{H}}$ を持つガウス確率変数であるとき, W を $\mathcal{H}$ 上のガウス過程とよぶ．$\mathcal{F}$ は $\{W(h) \mid h \in \mathcal{H}\}$ で生成される σ-加法族とする．C_b^∞ を無限回微分可能でその導関数が有界である関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ から成る集合とする．滑らかな確率変数から成る代数 $\mathcal{S}$ が

$$\mathcal{S} = \{F = f(W(h_1), \ldots, W(h_n)) \mid n \in \mathbb{N}, f \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n), h_1, \ldots, h_n \in \mathcal{H}\}$$

として定義され, Malliavin 微分 $\mathcal{D} : \mathcal{S} \to L^2(\Omega)\otimes\mathcal{H} \cong L^2(\Omega; \mathcal{H})$ が $F = f(W(h_1), \ldots, W(h_n)) \in \mathcal{S}$ に対して

$$\mathcal{D}(F) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(W(h_1), \ldots, W(h_n)) \otimes h_i$$

と定義される．$\mathcal{D}$ は様々な性質を持つが, ここでは次を挙げておく:

(i) (Leibniz 則) $\mathcal{D}(FG) = \mathcal{D}(F)G + F\mathcal{D}(G)$ for $F, G \in \mathcal{S}$;

(ii) (部分積分) $\mathbb{E}(FGW(h)) = \mathbb{E}(\langle h, \mathcal{D}(F)\rangle_{\mathcal{H}} G + F\langle h, \mathcal{D}(G)\rangle_{\mathcal{H}})$ for $F, G \in \mathcal{S},\ h \in \mathcal{H}$.

* E-mail:takayoshi.watanabe.q5@dc.tohoku.ac.jp

$\mathcal{D}: L^2(\Omega) \to L^2(\Omega; \mathcal{H})$ の共役も定義できる．これは発散と呼ばれ, $\delta : L^2(\Omega;\mathcal{H}) \to L^2(\Omega)$ と書かれる．

$$\mathcal{S}_{\mathcal{H}} := \left\{ u = \sum_{j=1}^{n} F_j \otimes h_j \mid n \in \mathbb{N}, F_1, \dots, F_n \in \mathcal{S}, h_1, \dots, h_n \in \mathcal{H} \right\}$$

に対して次が成り立つ:

$$\delta(u) = \sum_{j=1}^{n} F_j W(h_j) - \sum_{j=1}^{n} \langle h_j, \mathcal{D}(F_j) \rangle_{\mathcal{H}}$$

for $u = \sum_{j=1}^{n} F_j \otimes h_j \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$. 以降, $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}_+)$ として話を進める．$L^2_s(\mathbb{R}^m_+)$ として $L^2(\mathbb{R}^m_+)$ 上の対称関数から成る空間を表す．$f \in L^2_s(\mathbb{R}^m_+)$ に対して, W に関する多重積分を $I_m(f)$ と表す [Nua06]. 簡単に説明すると, $A_1, \dots, A_m$ を組ごとに互いに素な集合としたとき,

$$I_m(\tilde{\mathbb{1}}_{A_1 \times \cdots \times A_m}) = W(\mathbb{1}_{A_1}) \cdots W(\mathbb{1}_{A_m})$$

と定めた上で, 拡張することにより定義できる．ここで $\tilde{f}$ は f の対称化. S_m は m 次対称群. $I_m(f)$ の性質の中でも次が重要である．

Theorem 1.1 ([Nua06, Thm 1.1.4] the Wiener chaos expansion)**.** 任意の 2 乗可積分確率変数 $F \in L^2(\Omega)$ は多重積分の級数として表現できる:

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n),$$

ここで $f_0 = \mathbb{E}(F)$ であり, $f_n \in L^2_s(\mathbb{R}^n_+)$ は F から一意的に定まる．

次に, $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}_+)$ であるときの $\mathcal{D}$ の δ の作用の仕方を示そう．丁度, boson の消滅作用素, 生成作用素のように振る舞っていることがわかるだろう．

Proposition 1.2 ([Nua06, Propositions 1.2.2 and 1.2.7])**.** $F \in L^2(\Omega)$ が $F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n)$ というカオス展開を持つとする．すると $F \in \mathrm{Dom}(\mathcal{D})$ であることと

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \|I_n(f_n)\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot n! \|f_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} < \infty$$

であることが同値になる．$F \in \mathrm{Dom}(\mathcal{D})$ なら,

$$\mathcal{D}_t(F) = \sum_{n=1}^{\infty} n I_{n-1}(f_n(\cdot, t))$$

for a.e. $t \geq 0$.

Proposition 1.3 ([Nua06, Prop. 1.3.7])**.** $u \in L^2(\mathbb{R}_+ \times \Omega)$ が $u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n(\cdot, t))$ という表示を持つとする．すると $u \in \mathrm{Dom}(\delta)$ であることと

$$\delta(u) = \sum_{n=0}^{\infty} I_{n+1}(\tilde{f}_n)$$

が $L^2(\Omega)$ において収束することが同値になる．

1.2 Boson と Brown 運動の関係

この subsection における内容, 用語, 記号は [Par92, Mey95, FLS01] を参考にした.

$\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ を $\mathcal{H}$ の複素化とする. 複素共役 $J : \mathcal{H}_{\mathbb{C}} \to \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ が $h_1, h_2 \in \mathcal{H}$ に対して

$$J(h_1 + \sqrt{-1}h_2) = h_1 - \sqrt{-1}h_2$$

として定まる. $n \in \mathbb{N}$ とする. $\odot$ は対称積を表す:

$$\xi_1 \odot \cdots \odot \xi_n = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \xi_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \xi_{\sigma(n)}$$

for $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$. $\Xi_n(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})$ を $\{\xi_1 \odot \cdots \odot \xi_n \mid \xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}\}$ で生成される $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}^{\otimes n}$ の閉部分空間とする. $\Xi_n(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})$ のノルムは

$$\langle \xi_1 \odot \cdots \odot \xi_n, \xi_1' \odot \cdots \odot \xi_n' \rangle_{\Xi_n(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})} = \mathrm{per}\langle \xi_i, \xi_j' \rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{C}}} = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_i \langle \xi_i, \xi_{\sigma(i)}' \rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{C}}},$$

として与えられる. $\Gamma_s = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Xi_n(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})$ を $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ 上の対称 Fock 空間とする. ここで $\Xi_0(\mathcal{H}_{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}$. $\Omega \in \Gamma_s$ は真空ベクトル. $h \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ に対して, 生成・消滅成作用素 $a^*(h), a(h)$ は互いに共役な非有界閉作用素. $w = \xi_1 \odot \cdots \odot \xi_n$ に対してこれらの作用素の作用は次で与えられる:

$$a^*(h)w = h \odot w,$$
$$a(h)\xi_1 \odot \cdots \odot \xi_n = \sum_{i=1}^{n} \langle h, \xi_i \rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{C}}} \xi_1 \odot \overset{i}{\check{\cdots}} \odot \xi_n.$$

さらに, a^* と a は canonical commutation relations (CCR) を満たす:

$$[a(h), a^*(k)] = \langle h, k \rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{C}}},$$
$$[a(h), a(k)] = [a^*(h), a^*(k)] = 0$$

for $h, k \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$. $h \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ に対して $B(h) := a^*(h) + a(J(h))$ を定める. これが Brown 運動の非可換な実現になっていることが次の定理とその系からわかる.

Theorem 1.4. 任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して, $f_1, \ldots, f_{2m} \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ とする. すると

$$\langle \Omega, B(f_1) \ldots B(f_{2m-1})\Omega \rangle_{\Gamma_s} = 0,$$
$$\langle \Omega, B(f_1) \ldots B(f_{2m})\Omega \rangle_{\Gamma_s} = \sum \langle J(f_{l_1}), f_{r_1} \rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{C}}} \cdots \langle J(f_{l_m}), f_{r_m} \rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{C}}},$$

ここで, 和は $\{1, 2, \ldots, 2m\}$ を m 個の異なる組 $(l_1, r_1), \ldots, (l_m, r_m)$, $l_k < r_k$ に分ける分け方をわたる (そのような分け方は $(2m)!/2^m m!$ 通りある).

$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}_+)$, $a_t = a(\mathbb{1}_{[0,t]})$, $a_t^* = a^*(\mathbb{1}_{[0,t]})$ とし, $B_t = a_t + a_t^*$ とする.

Corollary 1.5. B_t のモーメントは Brown 運動のモーメントに等しい.

Boson に対してこのように実現された Brown 運動に対する Malliavin 解析としては [Lin93, Mey95, FLS01, FP16] のような文献がある. 特に [FLS01, FP16] では非可換な Girsanov 変換を導入することでかなり広いクラスに対して Malliavin 解析を行うことに成功している.

2 主定理

前の section の内容をまとめると次の 2 つの事実が浮かび上がる:

- Malliavan 微分, 発散はほとんど多重積分に対する消滅作用素, 生成作用素として理解できる.
- boson において生成・消滅作用素の和が Brown 運動を実現する.

これらの事実を踏まえて fermion に対して Malliavan 解析を行えることを示そう. 以下の内容は [Wat24] に基づく.

2.1 Fermion における Malliavin 解析の構成

まずは, [BSW82] から必要な内容を導入する. $n \in \mathbb{N}$ とする. $\wedge$ は反対称積を表し, $z_1, \dots, z_n \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ に対して

$$z_1 \wedge \cdots \wedge z_n = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) z_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes z_{\sigma(n)}$$

として定まる. $\Lambda_n(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})$ を $\{z_1 \wedge \cdots \wedge z_n \mid z_1, \dots, z_n \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}\}$ で生成される $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}^{\otimes n}$ の閉部分空間とする. $\Lambda_n(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})$ のノルムは

$$\langle z_1 \wedge \cdots \wedge z_n, z_1' \wedge \cdots \wedge z_n' \rangle_{\Lambda_n(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})} = \det \langle z_i, z_j' \rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{C}}},$$

として与えられる. $\Gamma_a = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Lambda_n(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})$ を $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ 上の反対称 Fock 空間とする. ここで $\Lambda_0(\mathcal{H}_{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}$. 生成・消滅作用素 $b^*(z), b(z)$ は互いに共役な有界作用素であり, その作用素ノルムは $\|b(z)\| = \|b^*(z)\| = \|z\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{C}}}$ となる. $w = z_1 \wedge \cdots \wedge z_n$ に対して, これらの作用素の作用は次で与えられる:

$$\begin{aligned} b^*(z)w &= z \wedge w, \\ b(z) z_1 \wedge \cdots \wedge z_n &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \langle z, z_i \rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{C}}} z_1 \wedge \overset{i}{\check{\cdots}} \wedge z_n. \end{aligned}$$

b^*, b は canonical anti-commutation relations (CAR) を満たす:

$$\begin{aligned} \{b(z), b^*(z')\} &= \langle z, z' \rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{C}}}, \\ \{b(z), b(z')\} &= \{b^*(z), b^*(z')\} = 0 \end{aligned}$$

for $z, z' \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$. $\Psi(z) \coloneqq b^*(z) + b(J(z))$ を定義するとこれが fermion における Brown 運動の対応物になる. Clifford 代数 $\mathscr{C}$ を $\{\Psi(z) | z \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}\}$ で生成される W^*-代数とする. $\Omega \in \Gamma_a$ は真空ベクトル. $m(\cdot) = \langle \Omega, \cdot \Omega \rangle_{\Gamma_a}$ を定めておく. $(\Gamma_a, \mathscr{C}, m)$ は regular probability gauge 空間 [Seg53, Seg56, Gro72] となっている. $1 \le p < \infty$ に対して, $L^p(\mathscr{C})$ を $\mathscr{C}$ のノルム

$$\|u\|_{L^p(\mathscr{C})} = m(|u|^p)^{\frac{1}{p}} = \langle \Omega, (u^* u)^{\frac{p}{2}} \Omega \rangle_{\Gamma_a}^{\frac{1}{p}}.$$

に関する完備化とする. $u \mapsto u\Omega$ という対応はユニタリ作用素 $D : L^2(\mathscr{C}) \to \Gamma_a$ を定める [Seg56, Gro72]. $L^\infty(\mathscr{C})$ は $\mathscr{C}$ に作用素ノルムを備えたものとする. $\mathscr{B}$ を $\mathscr{C}$ の W^*-部分代数とすると, 任

意の $1 \leq p \leq \infty$ に対して, $u \in L^p(\mathscr{C})$ の $\mathscr{B}$ に関する条件付き期待値 $m(u|\mathscr{B})$ を定めることができる [Seg53, Kun58, Yea75, Wil74, Ume54, Ume56]. 詳細は省略するが通常の条件付き期待値と同様の性質を持つことが示せる. ここからは $\mathcal{H}_{\mathbb{C}} = L^2(\mathbb{R}_+)$ としよう. Λ_n を $\Lambda_n(L^2(\mathbb{R}_+))$ の意味で用いる. $\mathscr{C}_t$ を $\{\Psi(u) \mid u \in L^2(\mathbb{R}_+), \mathrm{supp}(u) \subset [0,t]\}$ で生成される $\mathscr{C}$ の W^*-部分代数とする. X_t がマルチンゲールであることはこのフィルトレーション $\mathscr{C}_t$ に対して $m(X_t|\mathscr{C}_s) = X_s$ が成り立つことで特徴づけられる. $W_n \in L^2(\mathbb{R}_+^n)$ に対して次の性質を満たす $J_n(w_n) \in L^2(\mathscr{C})$ の存在が示せる:

$$J_n(w_n)\Omega = w_n$$

これが fermion における多重積分として振る舞う. 特にカオス展開が成り立つことが重要である.

Theorem 2.1 ([BSW82, Thm 2.4])**.** $\{X_t \mid t \in \mathbb{R}_+\}$ が $\{\mathscr{C}_t\}$ に適合した L^2-マルチンゲールであるとする. すると $w_0 \in \mathbb{C}$ と反対称な関数 $w_n \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+^n)$ が存在して

$$X_t = w_0 + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(w_n \mathbb{1}_{[0,t]^n})$$

が成り立つ.

長くなったが, 反対称 Malliavin 微分と発散が定義できるようになった.

Definition 2.2. 任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して, $v_n \in \Lambda_n$ とし $w_n \in L^2(\mathbb{R}_+^{n+1})$ は a.e. $t \geq 0$ に対して $w_n(t,\cdot) \in \Lambda_n$ とする. $\mathcal{D}_t : D^{-1}\Lambda_n \to L^2(\mathbb{R}_+) \otimes D^{-1}\Lambda_{n-1}$, $\delta : L^2(\mathbb{R}_+) \otimes D^{-1}\Lambda_n \to D^{-1}\Lambda_{n+1}$ を次のように定義する:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_t(J_n(v_n)) &:= nJ_{n-1}(v_n(t,\cdot)),\\ \delta(J_n(w_n(t,\cdot))) &:= J_{n+1}(\hat{w}_n),\end{aligned}$$

ここで $J_{-1}(\cdot) = 0$, $\hat{w}_n$ は w_n の反対称化. この定義は線形に拡張される.

のちに用いることになる β を定義してこの subsection を終わろう.

Definition 2.3 ([BSW82, Def. 3.13])**.** $\beta : L^2(\mathscr{C}) \to L^2(\mathscr{C})$ は自己共役なユニタリ作用素 $D^{-1}\Gamma(-1)D$ を表すこととする. ここで $\Gamma(-1)$ は -1 の第二量子化.

2.2 通常の Malliavin 解析と類似の性質

次の積公式が鍵になる. 以降の結果はこの公式を用いることで示されている.

Proposition 2.4. $p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする. 任意の $f \in \Lambda_p$, $g \in \Lambda_q$ に対して, 次の等式が成り立つ:

$$J_p(f)J_q(g) = \sum_{r=0}^{p\wedge q} r! \binom{p}{r}\binom{q}{r} J_{p+q-2r}(f\hat{\wedge}_r g),$$

ここで $p \wedge q = \min(p,q)$, $f\hat{\wedge}_r g$ は

$$f\wedge_r g := \int f(t_1,\ldots,t_{p-r},s_r,\ldots,s_1)g(s_1,\ldots,s_r,t_{p-r+1},\ldots,t_{p+q-2r})\, d\mathbf{s}.$$

を反対称化したもの.

まず, Leibniz 則の類似が成り立つ.

Proposition 2.5. 任意の $p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して, $f \in \Lambda_p,\ g \in \Lambda_q$ とする. すると

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_t(J_p(f)J_q(g)) &= \mathcal{D}_t(J_p(f))J_q(g) + (-1)^p J_p(f)\mathcal{D}_t(J_q(g)) \\ &= \mathcal{D}_t(J_p(f))J_q(g) + \beta(J_p(f))\mathcal{D}_t(J_q(g)).\end{aligned}$$

CAR も成立する.

Proposition 2.6. $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $h \in L^2(\mathbb{R}_+)$, $f \in \Lambda_p$, そして $h \otimes J_p(f) \in L^2(\mathbb{R}_+) \otimes D^{-1}\Lambda_p$ とする. すると

$$\{\mathcal{D}_t, \delta\} h \otimes J_p(f) = h(t)J_p(f).$$

形式的には, $\{\mathcal{D}_t, \delta\} = \delta_t \otimes \mathrm{Id}_{L^2(\mathscr{C})}$, ここで δ_t は Dirac 超関数.

fermion に対する Itô 解析である Itô-Clifford 解析の拡張のなることもわかる. $\mathfrak{H}[0,1]$ は Itô-Clifford 積分が定義できる空間であり, 単関数の極限で得られる.

Proposition 2.7. $\mathfrak{H}[0,1] \subset \mathrm{Dom}(\delta)$ であり, δ を $\mathfrak{H}[0,1]$ に制限したものは Itô-Clifford 積分に等しい:

$$\delta(u) = \int_0^1 d\Psi_t u_t$$

for every $u \in \mathfrak{H}[0,1]$.

反対称な Clark-Ocone 公式も成り立つ.

Theorem 2.8 (The anti-symmetric Clark-Ocone formula)**.** $F \in \mathrm{Dom}(\mathcal{D})$ とする. すると

$$F = m(F) + \int_0^1 d\Psi_t m(\mathcal{D}_t F | \mathscr{C}_t).$$

2.3 応用例

応用として集中不等式, 対数 Sobolev 不等式, fourth-moment 定理を考えよう. 集中不等式については Theorem 2.8 が有効に機能して通常の Malliavin 解析と同様の結果が示せる.

Theorem 2.9 (cf. [HP02, Lem. 3.1, Prop. 3.3] The concentration inequality)**.** $F \in \mathrm{Dom}(\mathcal{D}) \cap L^\infty(\mathscr{C})$ を $\int \|\mathcal{D}_t F\|_\infty^2\, dt < \infty$ であるような自己共役作用素とする. そのスペクトル分解を $F = \int_{-\infty}^\infty \lambda\, dE_\lambda$ とおく. もし

$$h(s) = \int \|\mathcal{D}_t F\|_{L^\infty(\mathscr{C})} \|e^{-sF}\mathcal{D}_t e^{sF}\|_{L^\infty(\mathscr{C})}\, dt$$

が $[0,\infty)$ 上単調であれば, $x \geq 0$ に対して

$$m\left(E([m(F)+x,\infty))\right) \leq \exp\left(-\int_0^x h^{-1}(s)\, ds\right)$$

が成り立つ.

対数 Sobolev 不等式については反対称 Malliavin 解析を生かそうとすると, 弱い結果しか得られなかった.

Proposition 2.10 (cf. [Gro75, Thm 3]). $f : \{-1, 1\} \to \mathbb{C}$ とする. 次が成り立つ:

$$\begin{aligned} &m(|f(\Psi_1)|^2 \log |f(\Psi_1)|^2) - m(|f(\Psi_1)|^2) \log m(|f(\Psi_1)|^2) \\ &\leq 2 \log 4 \cdot \|\mathcal{D}.f(\Psi_1)\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)\otimes L^2(\mathscr{C})}. \end{aligned}$$

Remark 2.11. [Gro75, Thm 3] によると, この不等式の右辺は $2\|\mathcal{D}.f(\Psi_1)\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)\otimes L^2(\mathscr{C})}$ が最良である.

最後に fourth-moment 定理を扱う. 通常の fourth-moment 定理は固定された次数のカオスに属する確率変数の列がいつ正規分布に分布収束するかの必要十分条件を述べた定理であり, 名前の由来はその必要十分条件の中に " 4 次のキュムラントが 0 に収束する " という条件があるからである. fermion においても通常の fourth-moment 定理に対応する条件の内, 一部が同値になることが示せる

Theorem 2.12. $q \geq 2$ とし $F_n = F_n^* = J_q(f_n)$, $n \in \mathbb{N}$, は q-次カオスに属する列とする ($f_n \in \Lambda_q$). さらに, $m(F_n^2) \to 1$, $n \to \infty$ となるとする. すると, $n \to \infty$ の時, 次の条件は同値:

(i) $\langle \mathcal{D}.F_n, \mathcal{D}.R^{-1}F_n \rangle \to 1$ in $L^2(\mathscr{C})$;
(ii) $\|f_n \hat{\wedge}_r f_n\|_{2q-2r} \to 0$, for all $r = 1, \ldots, q-1$ such that $q + r$ is even;
(iii) $\mathrm{Var}\left(\|\mathcal{D}.F_n\|^2\right) \to 0$.

上記について, $\langle f., g.\rangle = \int f_t^* g_t \, dt$, $f_t, g_t \in L^2(\mathscr{C})$ for a.e. $t \geq 0$ であり, $\|\cdot\|^2 = \langle \cdot, \cdot \rangle$, $\mathrm{Var}(F) = m(F^*F) - |m(F)|^2$ for $F \in L^2(\mathscr{C})$.

4 次のキュムラントを導く計算を Clifford 代数において再現すると次の定理において定義される写像 K が導かれる. ところが, この K が 0 に収束しないにもかかわらず, Theorem 2.12 の条件を満たす列を構成することができる.

Theorem 2.13. $f_1, \ldots, f_4 \in L^2(\mathbb{R}_+)$ を 0 でない $\langle f_i, f_j \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+)} = 0$, $i \neq j$ をみたす実関数とする. $f = f_1 \wedge \cdots \wedge f_4$, $F = J_4(f)$ とおき,

$$K(F) := m(F^4) - 2m(F^2)^2 - \frac{(-1)^q}{2}(2q!) \int \|f(t, *) \wedge f\|^2_{2q-1} \, dt$$

と定める. すると

(i) $K(F) \neq 0$,
(ii) $\|f \hat{\wedge}_2 f\|_4 = 0$.

なお, Brown 運動の対応物である $\Psi(z)$, $z \in L^2(\mathbb{R}_+)$ は Theorem 2.12 の諸条件を満たす上に, $K(\Psi(z)) = 0$ になる.

参考文献

[BSW82] C. Barnett, R. F. Streater, and I. F. Wilde. The Itô-Clifford integral. *Journal of Functional Analysis*, 48(2):172–212, 1982.

[FLS01] U. Franz, R. Leandre, and R. Schott. Malliavin calculus and Skorohod integration for quantum stochastic processes. *Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics*, 4(1):11–38, 2001.

[FP16] U. Franz and N. Privault. *Probability on real Lie algebras*, volume 206 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, 2016.

[Gro72] L. Gross. Existence and uniqueness of physical ground states. *Journal of Functional Analysis*, 10(1):52–109, 1972.

[Gro75] L. Gross. Logarithmic Sobolev inequalities. *American Journal of Mathematics*, 97(4):1061–1083, 1975.

[HP02] C. Houdré and N. Privault. Concentration and deviation inequalities in infinite dimensions via covariance representations. *Bernoulli*, 8(6):697–720, 2002.

[Kun58] R. A. Kunze. L_p Fourier transforms on locally compact unimodular groups. *Transactions of the American Mathematical Society*, 89(2):519–540, 1958.

[Lin93] J. M. Lindsay. Quantum and non-causal stochastic calculus. *Probability Theory and Related Fields*, 97:65–80, 1993.

[Mey95] P. A. Meyer. *Quantum probability for probabilists*, volume 1538 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, second edition, 1995.

[Nua06] D. Nualart. *The Malliavin calculus and related topics*. Probability and Its Applications. Springer, Berlin, second edition, 2006.

[Par92] K. R. Parthasarathy. *An introduction to quantum stochastic calculus*, volume 85 of *Monographs in Mathematics*. Birkhäuser, Basel, 1992.

[Seg53] I. E. Segal. A non-commutative extension of abstract integration. *Annals of Mathematics*, 57(3):401–457, 1953.

[Seg56] I. E. Segal. Tensor algebras over Hilbert spaces. II. *Annals of Mathematics*, 63(1):160–175, 1956.

[Ume54] H. Umegaki. Conditional expectation in an operator algebra. *Tohoku Mathematical Journal, Second Series*, 6(2-3):177–181, 1954.

[Ume56] H. Umegaki. Conditional expectation in an operator algebra, II. *Tohoku Mathematical Journal, Second Series*, 8(1):86–100, 1956.

[Wat24] T. Watanabe. Malliavin calculus on the Clifford algebra. *Journal of Stochastic Analysis*, 5(3):1–25, 2024.

[Wil74] I. F. Wilde. The free fermion field as a Markov field. *Journal of Functional Analysis*, 15(1):12–21, 1974.

[Yea75] F. J. Yeadon. Non-commutative L^p-spaces. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 77(1):91–102, 1975.